Sergei Zagny

Four Canons

piano

1981–2022

ZNGAY

Zagny Edition 07.2022
Score 001
© 1997, 2022 Sergei Zagny

Thanks to Keith Hammond for corrections in the English text.

Сергей Загний

Четыре канона

фортепиано

1981–2022

NGZ A Y

To

Victor Pavlovitch Frayonov

Виктору Павловичу Фраёнову

PREFACE

In “Four Canons” the new methods if transforming a proposta into a risposta are used. They can be described within the framework of the extended theory of canonic transformations. The author of these lines started developing this theory in connection with the present work.

BASIC CONCEPTS

Let *proposta* and *risposta* be *melodies*, i. e. monophonic sequence of notes. Canonic transformations imply a rule that defines the way of converting the proposta into the risposta. The following transformations are classical: (0) *exact repetition* (possibly with *transposition*); (1) *augmentation-diminution*; (2) *inversion*; (3) *retrograde motion*; and also the following combinations: (1)+(2), (1)+(3), (2)+(3) и (1)+(2)+(3).

Augmentation-diminution affects note durations; transposition or inversion affects pitches; retrograde motion affects the order of notes. Thus, a *note* can be defined as (d, p, n), where d is a *duration*, p is a *pitch*, and n is a *sequence number* of a note in a melody. A *rest*, in contrast to a *sounding note*, is defined as a note with a *vacant pitch* (Ø), i. e. a rest is $(d, Ø, n)$. If there are several successive rests in a music score, they are considered as a single rest, the duration of which is equal to their sum.

The following is confined with the cases when each note of the risposta is associates with exactly one note of the proposta. We express a note of the proposta as (d, p, n), an associated note of the risposta as (d', p', n'), a relation between them as $(d', p', n') = f(d, p, n)$, where f is a *rule of transformation*. When we consider only durations or only pitches, the expressions $d' = f(d)$ or $p' = f(p)$ are used. Hereafter it is meant that the rule $n' = f(n)$ which define the order of notes is always $n' = n$, i. e. a succession of notes always remains unchanged. It is also meant that for any $p' = f(p)$ transformations, a sounding pitch converts into a sounding pitch, and a rest into a rest.

If a canon has two rispostas, a duration and a pitch of the risposta-1 or of the risposta-2 are denoted as ${}^1d'$ and ${}^1p'$, or ${}^2d'$ and ${}^2p'$ respectively.

Also we need a concept of a *melodic interval* (i). It is defined as an interval between given pitch (p) and a pitch of the *previous sounding note* (sp_{prev}), i. e. $i = p - sp_{\text{prev}}$. Melodic interval for risposta is denoted and defined as $i' = p' - sp'_{\text{prev}}$; for risposta-1 as ${}^1i' = {}^1p' - {}^1sp'_{\text{prev}}$, etc.

Let us assign the following numerical values to durations: let = 1, (triplet eighth) = ⅔, = 2, = ⅔, = 3, = 4, etc. Durations may be matched only to positive numbers.

Numerical values for pitches we assign in the following way. The pitches are the members of chromatic scale. Neighbouring pitches differs by one. “C” of the first octave is a datum (0). Pitches above the datum associated with positive numbers, pitches below associated with negative numbers. Pitches may be matched only to integers.

CLASSICAL TRANSFORMATIONS

Classical transformations of durations are defined by the following formulas:
$d' = d$ is an exact repetition of durations;
$d' = 2d$ is double augmentation;
$d' = 3d/2$ is one-and-half augmentation;
$d' = d/3$ is triple diminution;
etc.

Classical transformations of pitches are defined by the following formulas:
$p' = p$ is the exact repetition of pitches;

$p' = p + a$ (a is an integer) is transposed repetition (a is an interval of transposition);
$p' = -p + a$ (a is an integer) is inversion ($a/2$ is the center of inversion).

TRANSFORMATIONS USED IN "FOUR CANONS"

The transformations of durations are nonclassical in all four canons. The transformations of pitches are nonclassical in the third canon.

Canon 1. Proposta is in upper voice. The durations of the risposta are derived according to the formula $d' = 8/d$ (Fig. 1).

In respect to pitches, the risposta is an inversion of the proposta: $p' = -p + 5$ (Fig. 2).

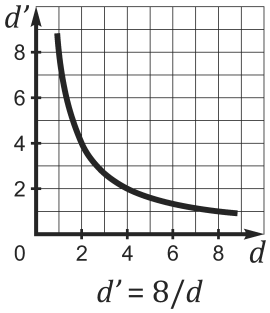


Figure 1

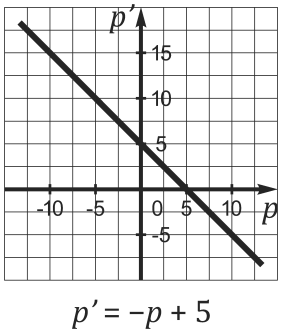


Figure 2

Canon 2. Proposta is in upper voice. The transformation of durations is as follows. Sounding notes placed directly before the rests are transformed according to the rule $d' = 1$ (all they become sixteenths). Remaining sounding notes are transformed according to the rule $d' = 2$ (Fig. 3, all these notes become eighths). The rests within the phrases become eighths or dotted eighths (measures 2–4, lower system, p. 4). The rests between the phrases are considerably longer; the durations of these rests are not predefined. The boundaries between the phrases were defined freely.

In respect to pitches, this is a canon at the lower twelfth: $p' = p - 19$ (Fig. 4).

Canon proper is only the first half of the piece. The second half is a free addition to the first.

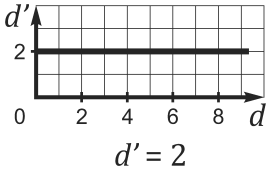


Figure 3

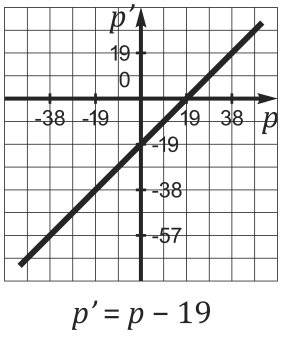


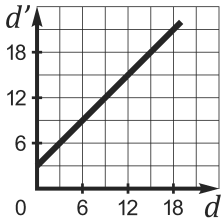
Figure 4

Canon 3. Proposta is in lower voice, two rispostas are in upper voices. Rispostas doubles each other rhythmically, so for both the rule for durations is the same. For sounding notes the formula is $d' = d + 3$ (Fig. 5, to each note dotted eighth is added). For rests the formula is $d' = d$ (rests remain unchanged).

Risposta-1 (middle voice) starts from E of the first octave. The rule for all remaining pitches of this risposta is ${}^1i' = i + \mathrm{sgn}(i) \times 7$ (Fig. 6). (Function $\mathrm{sgn}(i)$ is defined as follows: $\mathrm{sgn}(i) = -1$ if $i < 0$; $\mathrm{sgn}(i) = 1$ if $i > 0$; $\mathrm{sgn}(i) = 0$ if $i = 0$.) In other words, the direction of melodic intervals remain intact and each interval is enlarged by perfect fifth.

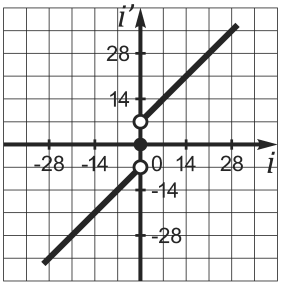
The same rule may be expressed without usage of the concept of melodic interval, but the formula becomes noticeably more complicated: ${}^1p' = p - sp_{\mathrm{prev}} + \mathrm{sgn}(p - sp_{\mathrm{prev}}) \times 7 + {}^1sp'_{\mathrm{prev}}$. At the same time this expression shows explicitly that the pitch of the note of the risposta depends not only on *respective note* of proposta but on the *previous sounding notes* of proposta and risposta-1.

Risposta-2 (upper voice) starts from A of the first octave. This pitch has been chosen freely. The rule for all remaining pitches is ${}^2p' = {}^1p' + |i| - 4$. In other words, the pitch of the risposta-1 that sounds simultaneously is added to absolute value of melodic interval of proposta, then the resulting interval is decreases by major third. (Sometimes risposta-2 sounds below risposta-1.)



$d' = d + 3$

Figure 5



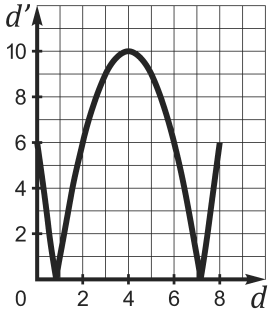
$i' = i + \mathrm{sgn}(i) \times 7$

Figure 6

Canon 4. Proposta is in lower voice. The durations of the risposta are derived according to the formula $d' = |-d^2 + 8d - 6|$ (Fig. 7). The "inconvenient" values are rounded. For instance, $2\frac{8}{9}$ which is derived from the triplet eighth ($1\frac{1}{3}$) is interpreted as dotted eighth (3).

In respect to pitches, the risposta is an inversion of the proposta, as in Canon 1: $p' = -p + 5$.

Technically *Canon 4* consists of two canons, let call them canon-A and canon-B. The latter is placed "inside" the former. The piece has three sections. Canon-A is interrupted at the end of the first section and resumed in the third. Canon-B is located in the second section of the piece.



$d' = |-d^2 + 8d - 6|$

Figure 7

* * *

Предисловие

В «Четырёх канонах» применены новые способы преобразования пропосты в риспосту. Их можно описать в рамках расширенной теории канонических преобразований, которую автор этих строк начал разрабатывать, задумывая это сочинение.

Основные понятия

Пусть *пропоста* и *риспоста* — это некие *мелодии*, т. е. одноголосные последовательности, состоящие из нот. Каноническое преобразование предполагает некоторое правило, определяющее, каким образом пропоста превращается в риспосту. Классическими преобразованиями являются: (0) *точное повторение* (возможно, с *транспозицией*); (1) *увеличение-уменьшение*; (2) *обращение*; (3) *ракоход*; а также следующие комбинации: (1)+(2), (1)+(3), (2)+(3) и (1)+(2)+(3).

В случае увеличения-уменьшения меняются длительности нот; в случае транспозиции или обращения меняются высоты; в случае ракохода меняется порядок нот. Следовательно, мы можем определить *ноту* как (d, p, n), где d — *длительность*, p — *высота*, и n — *порядковый номер* ноты в мелодии. *Паузу*, в отличие от *звучащей ноты*, определим как ноту с *отсутствующей высотой* (Ø), т. е. пауза — это $(d, Ø, n)$. Если в нотном тексте выписаны несколько пауз подряд, они рассматриваются как одна пауза, длительность которой равна их сумме.

Ограничимся случаями, когда каждой ноте риспосты соответствует в точности одна нота пропосты. Ноту пропосты обозначим как (d, p, n), соответствующую ей ноту риспосты — как (d', p', n'), а отношение между ними — как $(d', p', n') = f(d, p, n)$, где f — *правило преобразования*. Когда мы рассматриваем только длительности или только высоты, мы пишем $d' = f(d)$ или $p' = f(p)$. Далее подразумевается, что правило $n' = f(n)$, определяющее порядок нот, всегда имеет вид $n' = n$, т. е. последовательность нот всегда остаётся неизменной. Также подразумевается, что при любых преобразованиях $p' = f(p)$ звучащая нота превращается в звучащую ноту, а пауза — в паузу.

Если в каноне две риспосты, то для риспосты-1 длительность и высоту её ноты обозначим как ${}^1d'$ и ${}^1p'$. Обозначения для риспосты-2: ${}^2d'$ и ${}^2p'$.

Также нам понадобится понятие *мелодический интервал* (i). Определим его как интервал между данной высотой (p) и высотой *предшествующей звучащей ноты* (sp_{prev}), т. е. $i = p - sp_{\text{prev}}$. Мелодический интервал для риспосты обозначается и определяется как $i' = p' - sp'_{\text{prev}}$; для риспосты-1 — как ${}^1i' = {}^1p' - {}^1sp'_{\text{prev}}$, и т. д.

Длительностям назначим следующие числовые значения: пусть = 1, (триольная восьмая) = ⅔, = 2, = ⅝, = 3, = 4, и т. д. Длительностям могут соответствовать только положительные числа.

Числовые значения для высот определим следующим образом. Звукоряд, которому принадлежат высоты — хроматическая гамма. Соседние высоты различаются на единицу. *До* первой октавы — точка отсчёта (0). Высоты выше этой точки — положительные числа, высоты ниже этой точки — отрицательные. Высотам могут соответствовать только целые числа.

Классические преобразования

Классические преобразования длительностей определяются следующими формулами:

$d' = d$ — точное повторение длительностей;

$d' = 2d$ — двукратное увеличение;

$d' = 3d/2$ — полуторакратное увеличение;

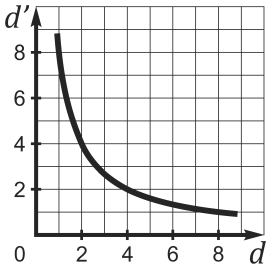
$d' = d/3$ — трёхкратное уменьшение;
и т. д.

Классические преобразования высот определяются следующими формулами:
$p' = p$ — точное повторение высот;
$p' = p + a$ (a — целое число) — транспонированное повторение (a — интервал транспозиции);
$p' = -p + a$ (a — целое число) — обращение ($a/2$ — центр обращения).

Преобразования, использованные в «Четырёх канонах»

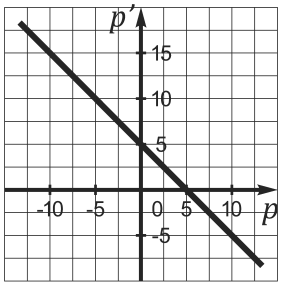
Во всех четырёх канонах неклассическими являются преобразования длительностей; в третьем — также преобразования высот.

Первый канон. Пропоста — верхний голос. Длительности риспосты выведены по формуле $d' = 8/d$ (рис. 1).
В отношении высот высот риспоста является обращением пропосты: $p' = -p + 5$ (рис. 2).



$d' = 8/d$

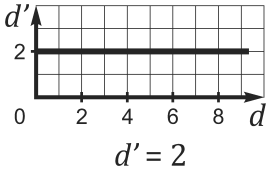
Рис. 1



$p' = -p + 5$

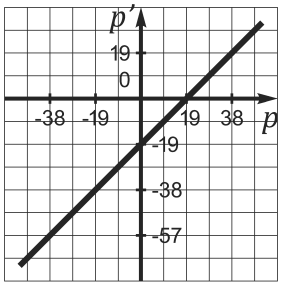
Рис. 2

Второй канон. Пропоста — верхний голос. Преобразование длительностей таково. Звучащие ноты, стоящие непосредственно перед паузами, преобразованы по правилу $d' = 1$ (все они становятся шестнадцатыми); остальные звучащие ноты преобразованы по правилу $d' = 2$ (рис. 3, все эти ноты становятся восьмыми). Паузы внутри фраз становятся восьмыми либо восьмыми с точкой (нижняя система, такты 2–4 на с. 4). Паузы между фразами существенно длиннее, их протяжённость не предопределена. Границы между фразами определялись произвольно.
В отношении высот — это канон в нижнюю дуодециму: $p' = p - 19$ (рис. 4).
Собственно каноном является только первая половина пьесы. Вторая половина — это свободное дополнение к первой.



$d' = 2$

Рис. 3



$p' = p - 19$

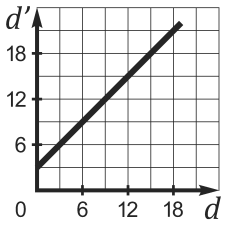
Рис. 4

Третий канон. Пропоста — нижний голос, две риспосты помещены в верхних голосах. Ритмически риспосты дублируют друг друга, соответственно, правила для длительностей для обеих риспост одинаковы. Для звучащих нот: $d' = d + 3$ (рис. 5, к каждой ноте прибавляется восьмая с точкой); для пауз: $d' = d$ (паузы остаются неизменными).

Риспоста-1 (средний голос) начинается от *ми* первой октавы. Для всех остальных высот этой риспосты правило таково: ${}^1i' = i + \mathrm{sgn}(i) \times 7$ (рис. 6). (Функция $\mathrm{sgn}(i)$ определяется так: $\mathrm{sgn}(i) = -1$, если $i < 0$; $\mathrm{sgn}(i) = 1$, если $i > 0$; $\mathrm{sgn}(i) = 0$, если $i = 0$.) Иначе говоря, направление мелодических интервалов сохраняется и каждый интервал расширяется на чистую квинту.

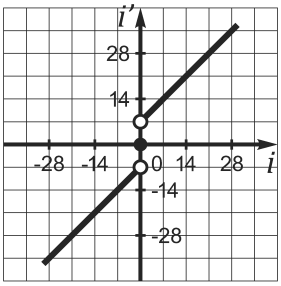
Если то же самое правило записать без использования понятия мелодического интервала, то формула становится заметно сложнее: ${}^1p' = p - sp_{\mathrm{prev}} + \mathrm{sgn}(p - sp_{\mathrm{prev}}) \times 7 + {}^1sp'_{\mathrm{prev}}$. В то же время такая запись делает наглядным тот факт, что высота ноты риспосты зависит не только от *соответствующей ноты* пропосты, но также от *предшествующих звучащих нот* пропосты и самой риспосты-1.

Риспоста-2 (верхний голос) начинается от *ля* первой октавы. Эта высота выбрана произвольно. Для всех остальных высот правило таково: ${}^2p' = {}^1p' + |i| - 4$. Иначе говоря, к высоте ноты риспосты-1, звучащей одновременно, прибавляется мелодический интервал пропосты, взятый в абсолютном значении, и полученная сумма уменьшается на большую терцию. (Иногда риспоста-2 звучит ниже риспосты-1.)



$d' = d + 3$

Рис. 5



$i' = i + \mathrm{sgn}(i) \times 7$

Рис. 6

Четвёртый канон. Пропоста — нижний голос. Длительности риспосты выведены по формуле $d' = |-d^2 + 8d - 6|$ (рис. 7). «Неудобные» значения округлены. Например, $2\frac{8}{9}$, которое получается из триольной восьмой ($1\frac{1}{3}$), интерпретировано как восьмая с точкой (3).

В отношении высот риспоста является обращением пропосты, как в первом каноне: $p' = -p + 5$.

Технически в *Четвёртом каноне* два канона, назовём их канон-А и канон-В. Второй расположен «внутри» первого. В пьесе три раздела. Канон-А прерывается в конце первого раздела и возобновляется в третьем. Канон-В звучит во втором разделе пьесы.

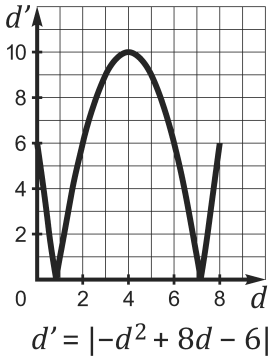


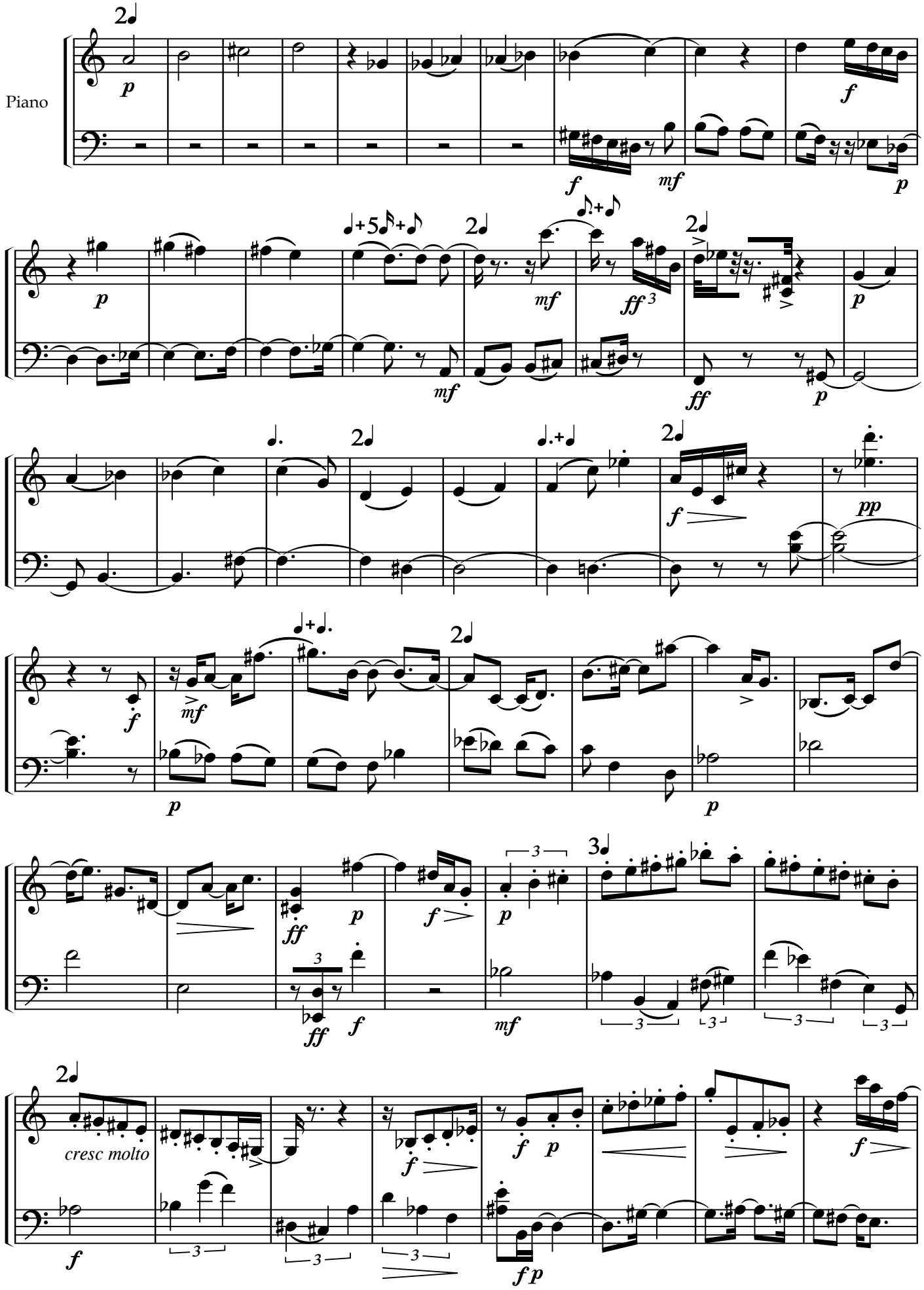
Рис. 7

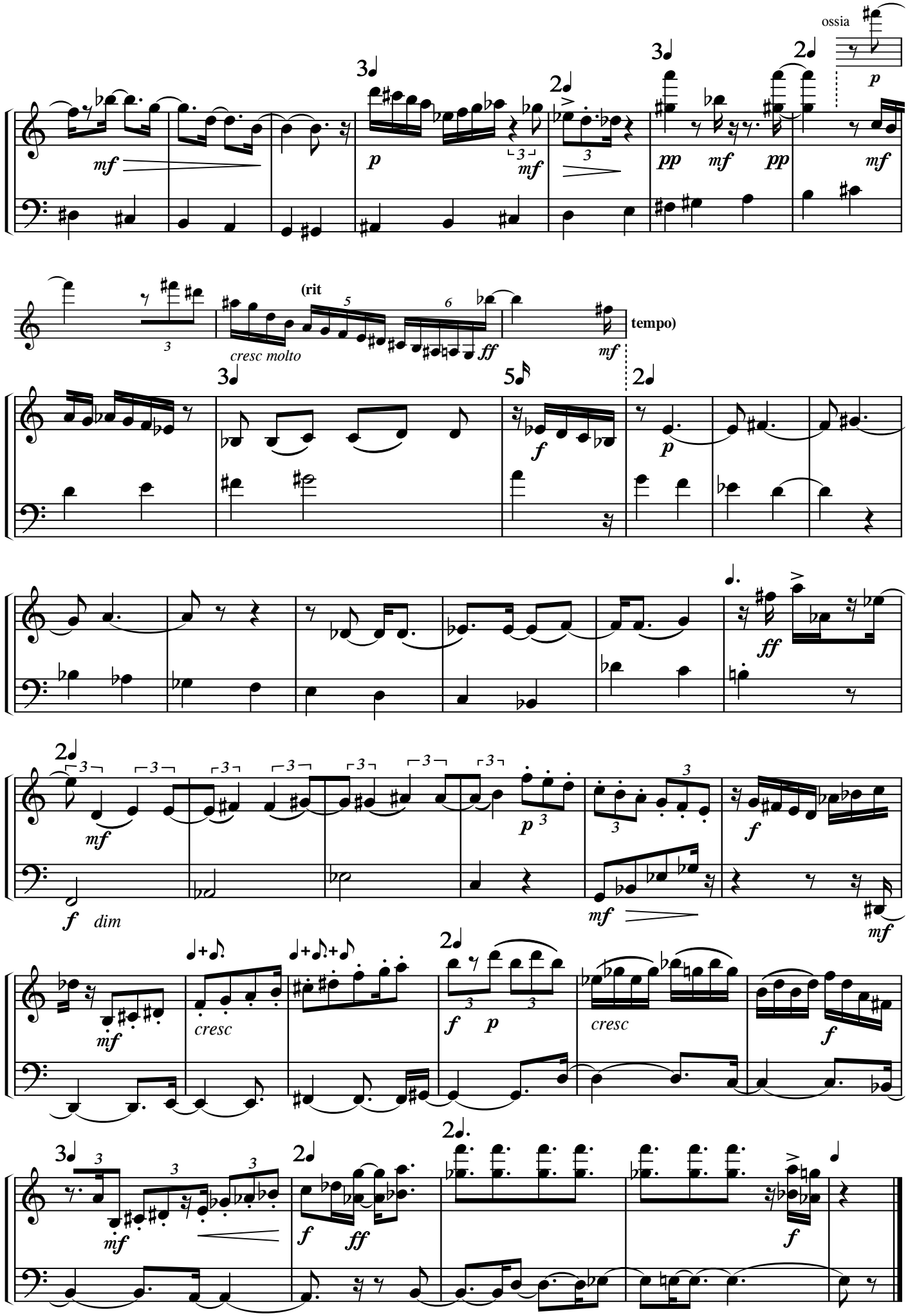
* * *

Canon 1

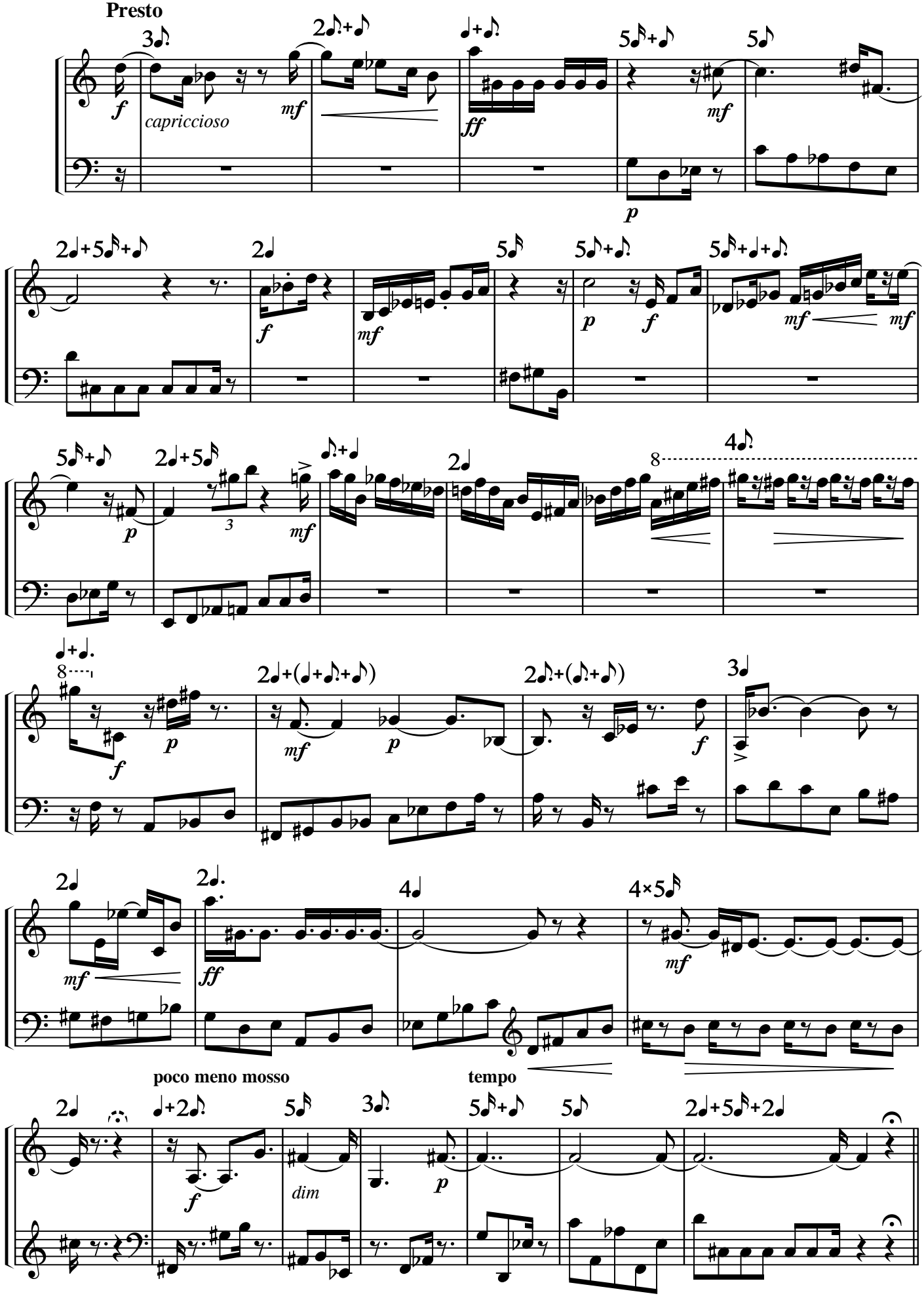
Allegro moderato

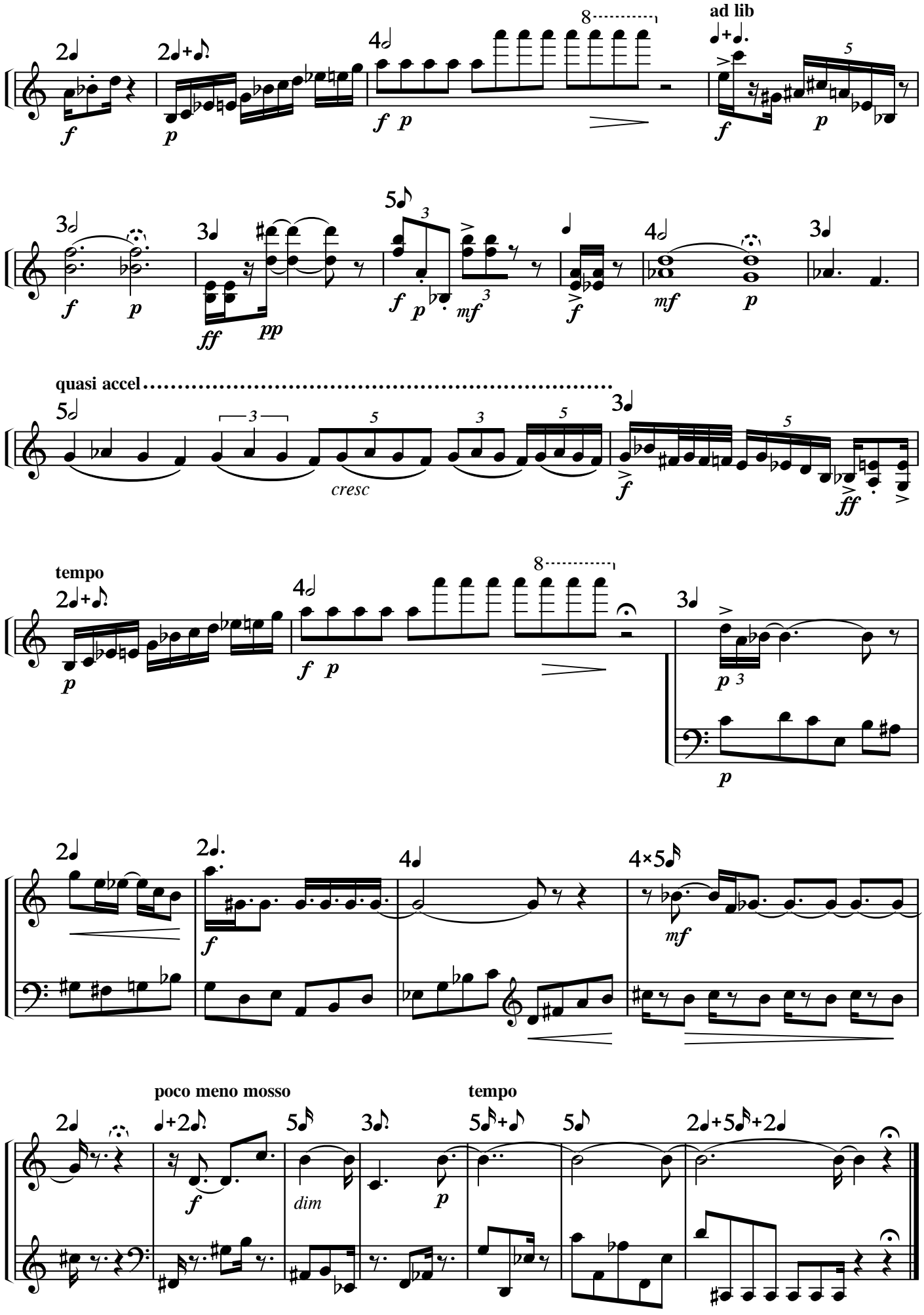
Piano



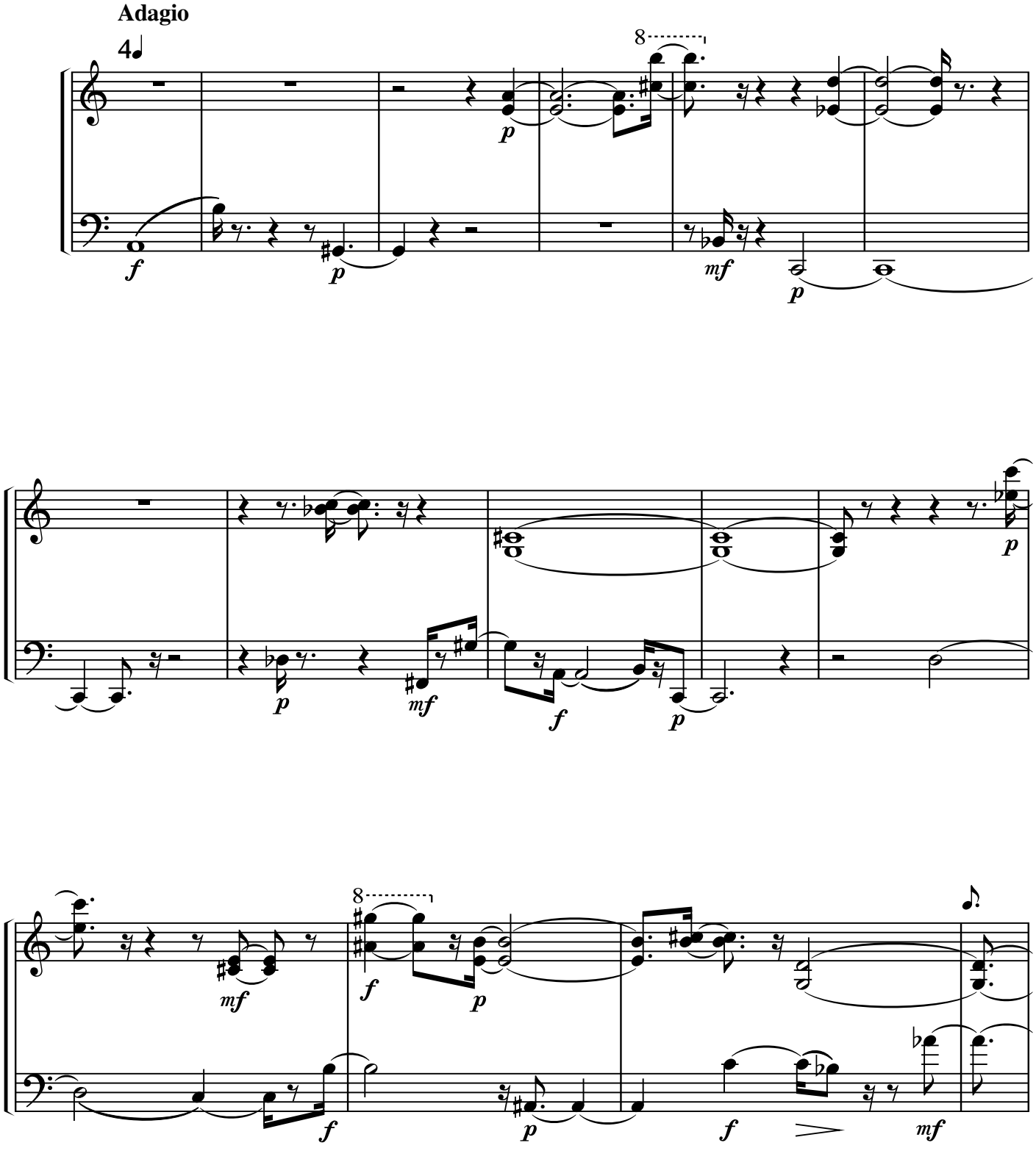

ossia
(rit
cresc molto
tempo)
cresc
dim

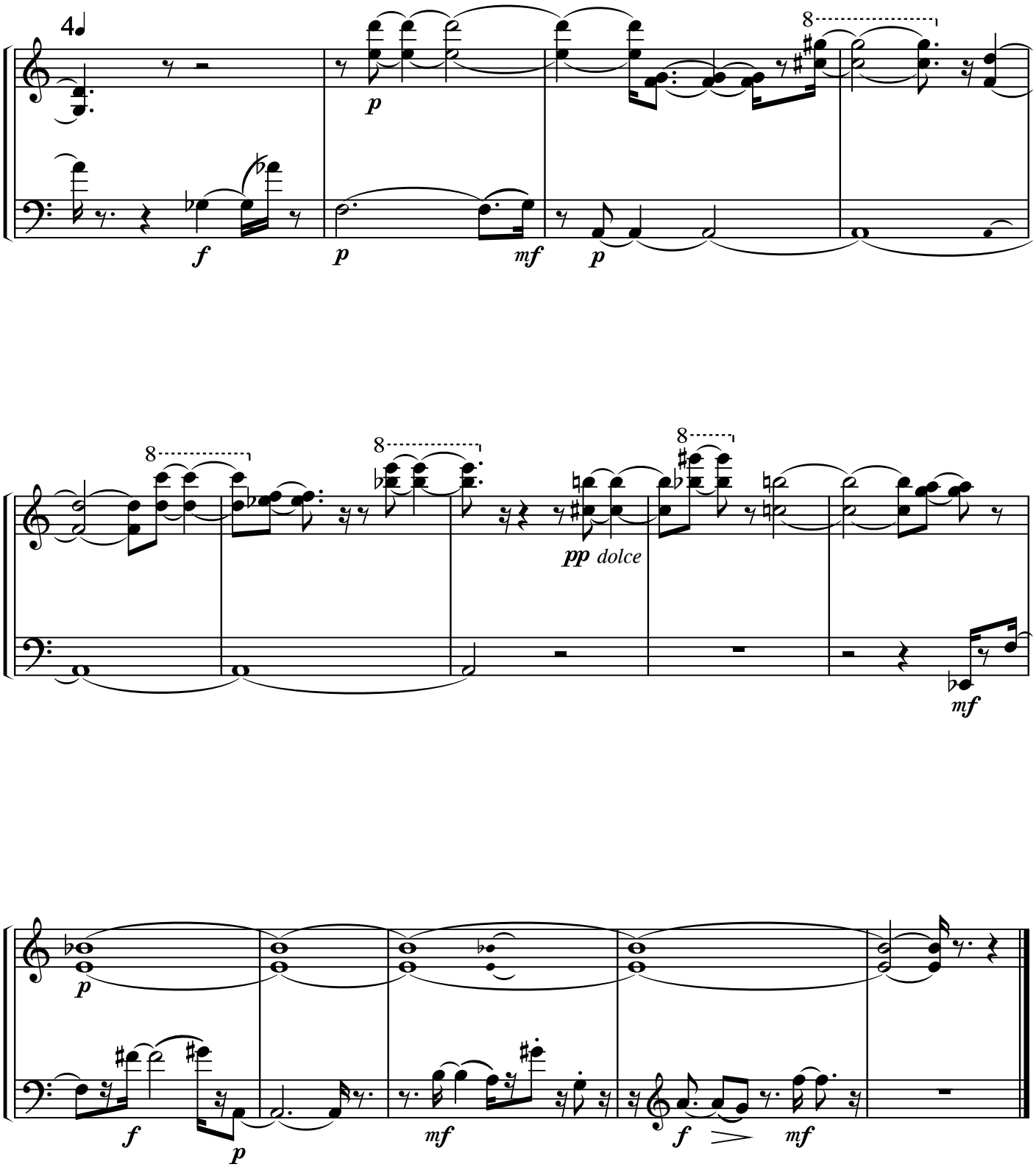
Canon 2




ad lib
quasi accel
cresc
tempo
poco meno mosso
tempo
dim

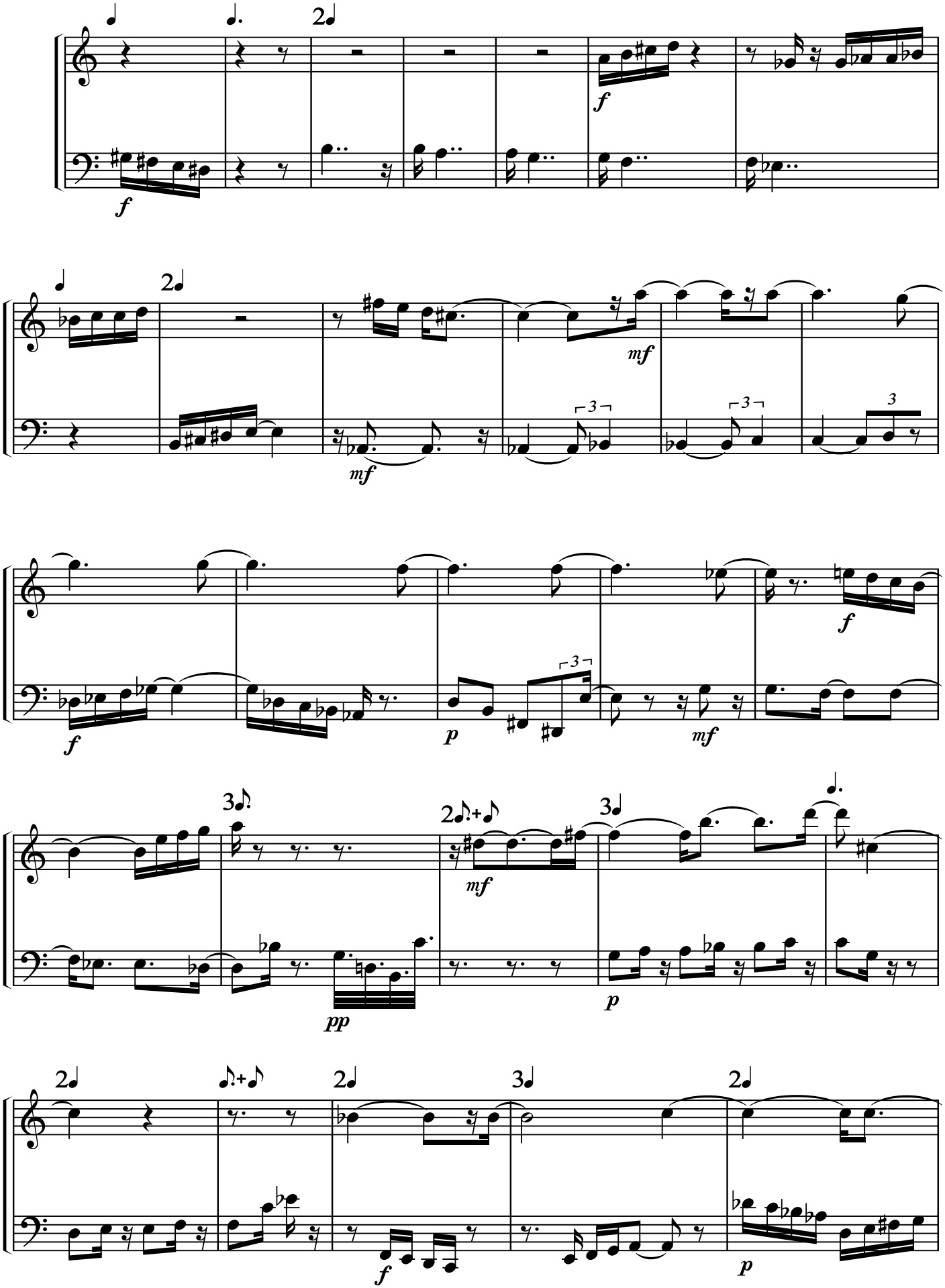
Canon 3

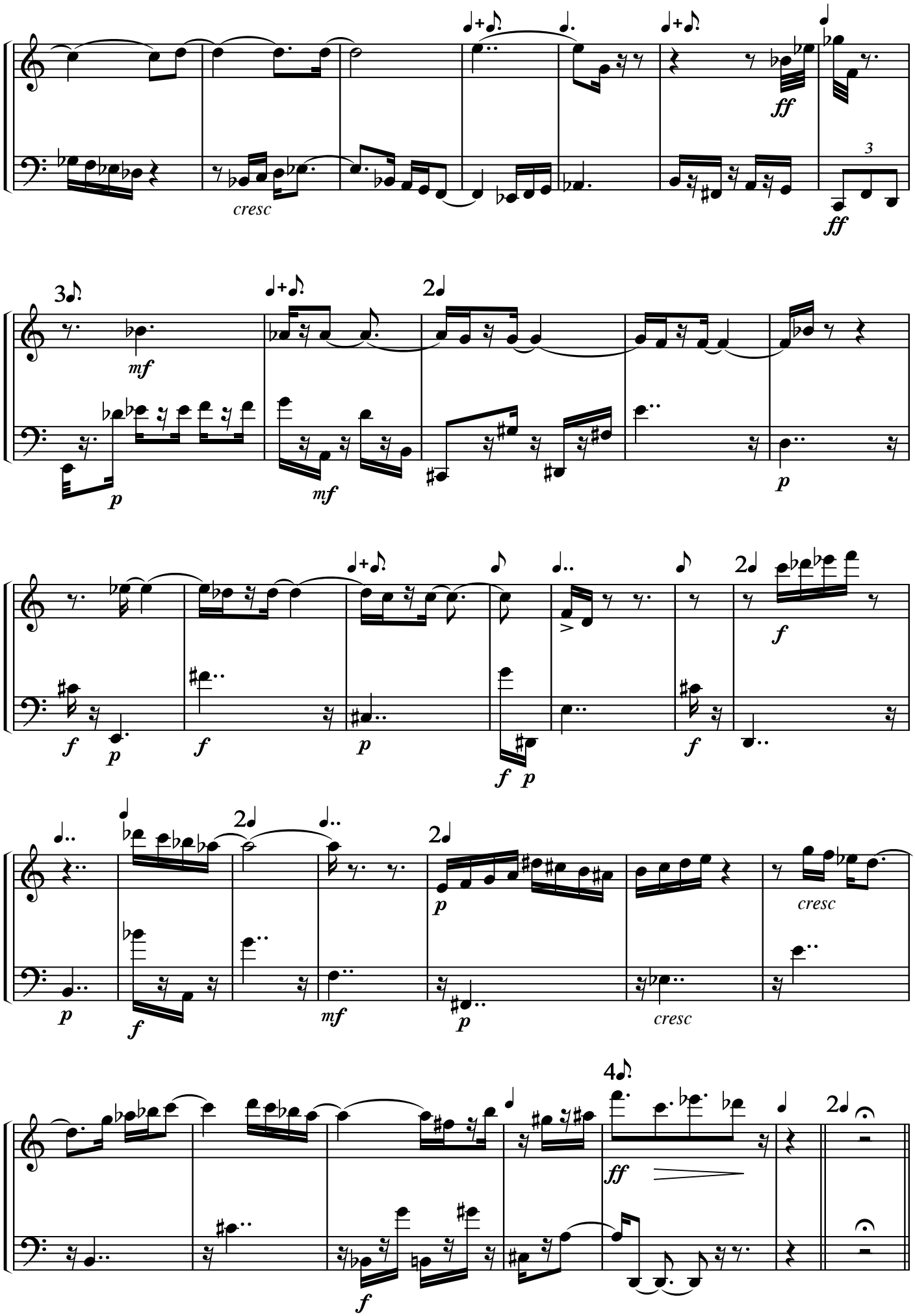


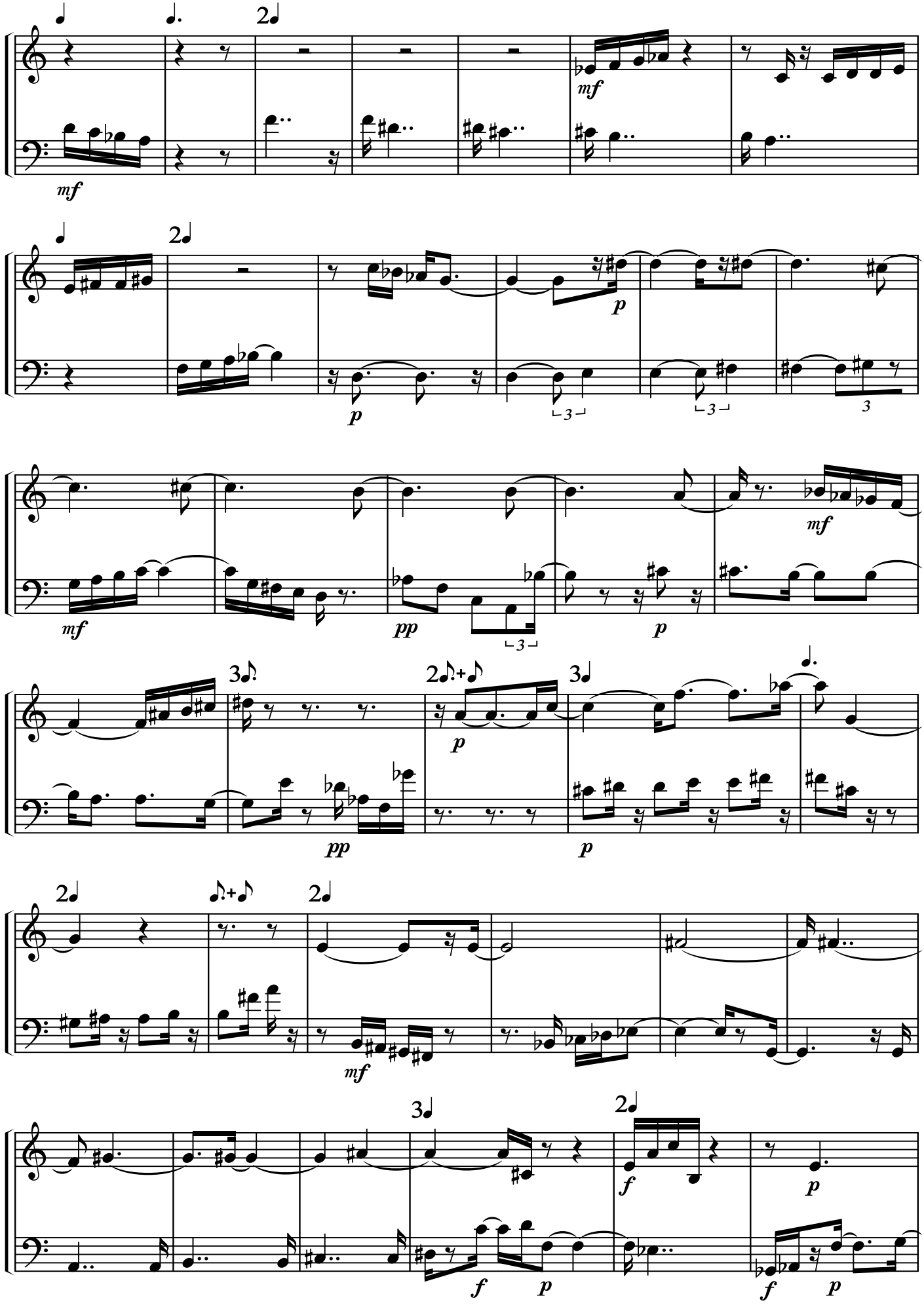

4
8
p
f
p
mf
p
8
8
8
pp dolce
mf
p
f
p
mf
f
mf

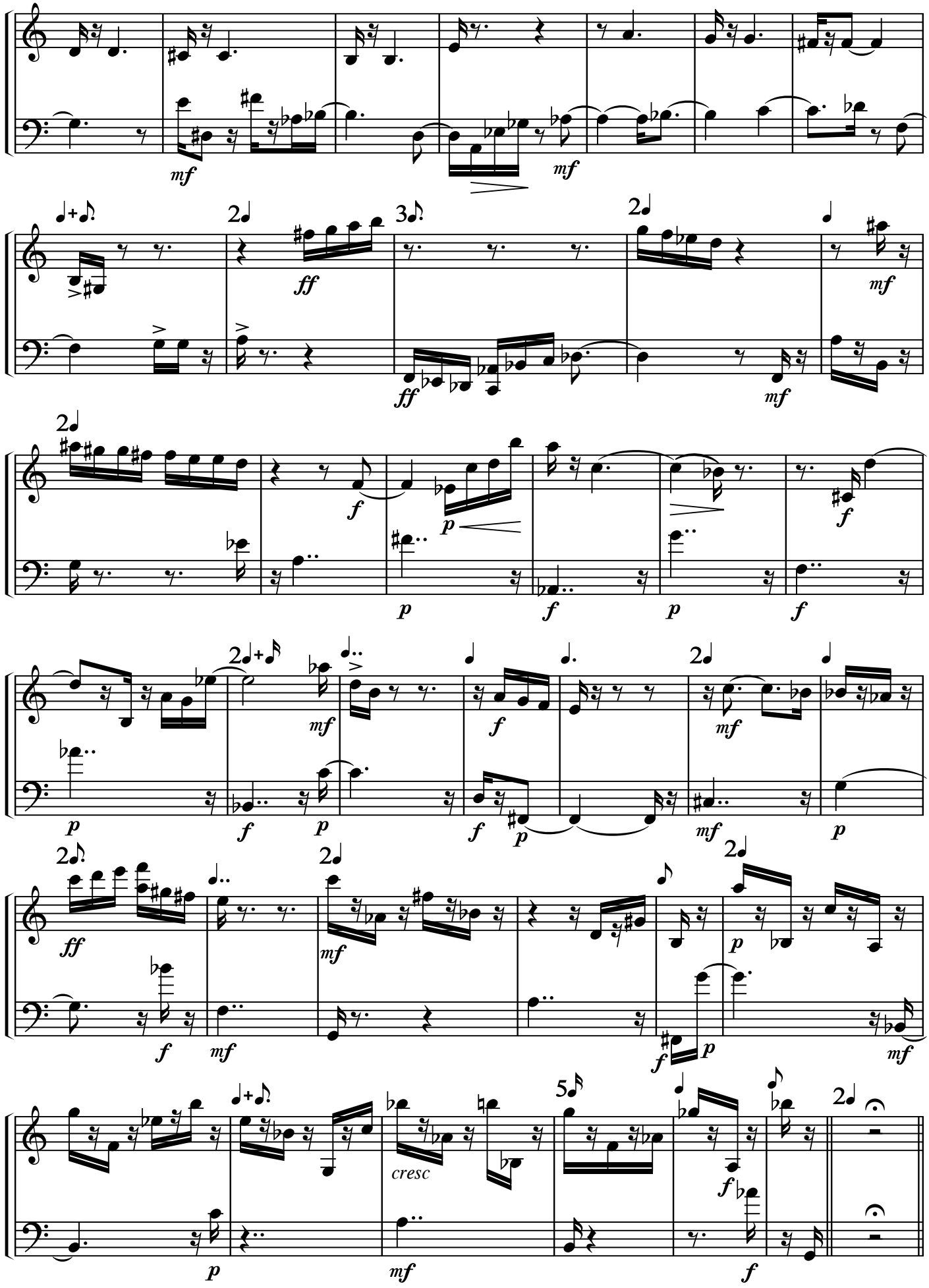
Canon 4

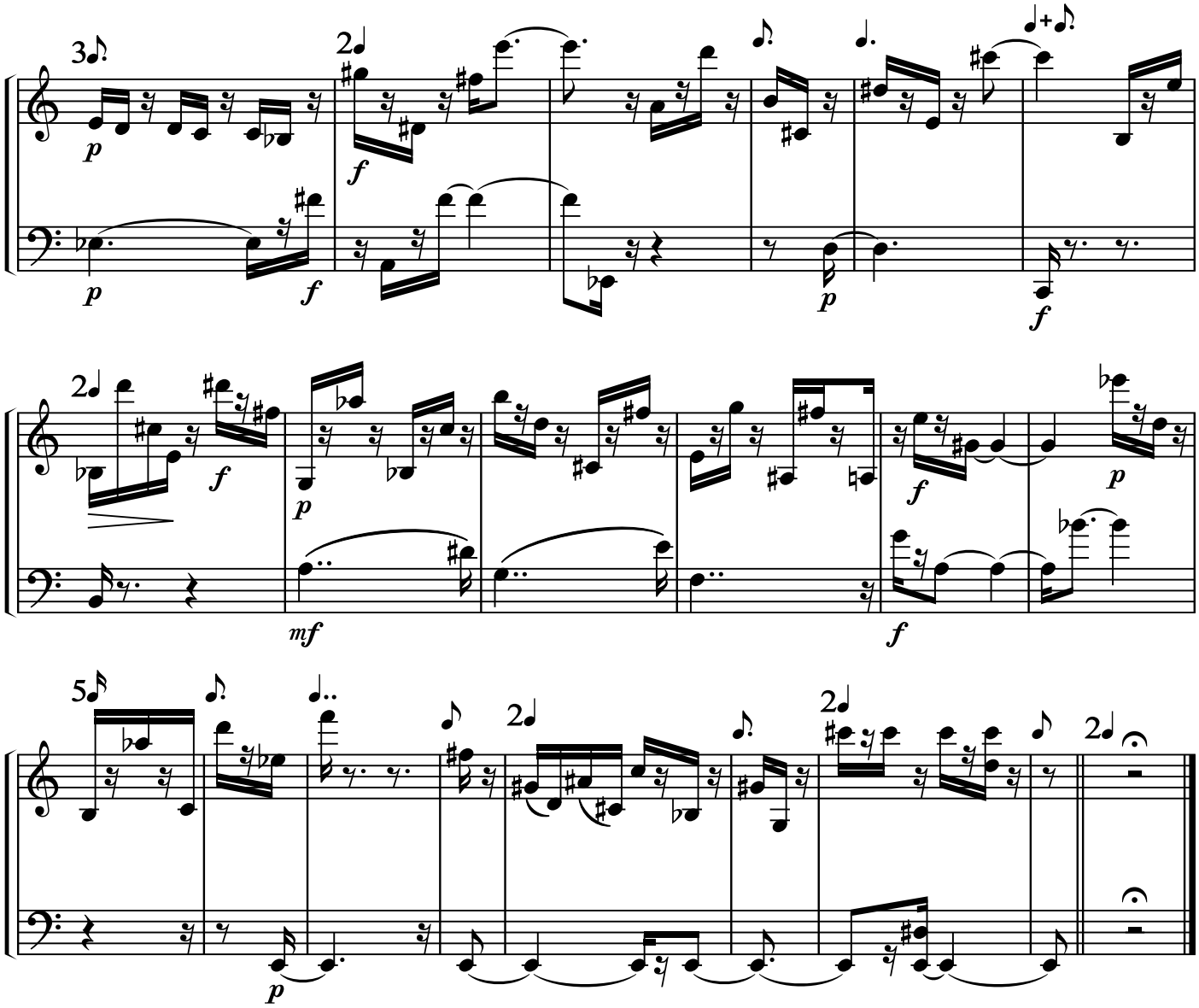
Allegro moderato




cresc
ff
3
ff
3
mf
p
mf
2
p
f
p
f
p
f
p
f
2
f
p
f
2
mf
2
p
p
cresc
cresc
4
ff
2
f


mf
p
pp
f


mf
mf
ff
ff
mf
f
p
f
p
f
mf
f
mf
p
f
p
mf
p
ff
mf
f
mf
f
p
mf
p
cresc
mf
f



1981–2022